Visitem un edifici construït o vivim l'experiència de construir-lo?

Anton Aubanell

L'edifici de la matemàtica, sense cap dubte, té una enorme bellesa. En ell, la mirada avesada, hi observa harmonia, coherència, completesa... És el resultat de segles i segles d'esforç humà per crear un cos formidable de coneixement. Tanmateix no és un edifici acabat, hi ha paletes i fusters que van treballant per fer-lo més ampli per tal d'acollir noves idees, més potent per respondre a noves necessitats, més ben fonamentat per assegurar-ne la solidesa... És un cos viu en contínua construcció. I això li atorga encara més encant!

A vegades, la persona que ensenya matemàtiques actua com un guia que va mostrant al seu alumnat les estances d'aquest edifici, netes i acabades, amb mirada meravellada però amb poc espai per a la descoberta, amb magnífiques explicacions sobre com es va construir però sense gaire oportunitat per a l'experiència personal de construcció...

Si recordem els nostres anys escolars o universitaris potser se'ns faran presents aquelles exposicions que començaven per unes definicions precises dels conceptes que manejaríem, seguien per l'establiment d'axiomes o de propietats elementals, continuaven enunciant proposicions més complexes que sovint eren molt laborioses de demostrar, teoremes que culminaven la construcció i, a vegades, corol·laris que acabaven d'arrodonir l'edifici. A mi, deixeu-me ser franc, em seduïa i em continua seduint aquesta perfecta construcció, l'encaix de totes les idees, l'encadenament dels raonaments, la bellesa conjunta... Probablement moltes de les persones que llegiu aquestes línies també us heu enamorat una mica d'aquesta harmonia interna de la matemàtica que s'ha de sentir i viure en primera persona. Tanmateix hem de reconèixer que sentir i viure les matemàtiques en primera persona no sempre ha estat present en l'experiència escolar de molts dels nostres conciutadans d'una manera tan intensa com seria desitjable.

Sovint l'educació matemàtica escolar, reproduint la pròpia formació de mestres i professorat, ha estat més una visita guiada a l'edifici matemàtic que una descoberta personal, viscuda i emocionant de cadascun dels seus racons. Sense oblidar els valors positius que té un guiatge amatent i ordenat, capaç d'estructurar bé el coneixement, de transmetre idees clares i ben seqüenciades... hauríem d'admetre que seria important aconseguir una major presència a les classes de matemàtiques d'activitats que impliquin exploració, repte personal, descoberta i constatació de la utilitat real del coneixement.

Actualment, entre mestres i professorat de matemàtiques, s'observa un esforç decidit per accentuar la presència d'aquest enfocament més vivencial i aplicat en les classes de matemàtiques. Potser ens hi ha portat una evolució de la cultura professional que anem construint i compartint, potser la perspectiva competencial que té una presència cada cop més clara en el sistema educatiu, potser la necessitat d'una major adaptació a un alumnat immergit en un món molt dinàmic i interactiu, potser el fet de disposar d'eines potents associades a les tecnologies i de materials manipulables atractius. El fet és que cada cop més es comparteix l'interès docent perquè, en el nostre guiatge per l'edifici matemàtic, no tan sols es descriguin i es gaudeixi dels espais ja construïts, sinó que es visqui personalment l'experiència de la construcció. I tenim la sort que fer descobertes és molt emocionant en matemàtiques. Permeteu-me que presenti tot seguit un exemple d'experiència d'aquest tipus que s'emmarca en els blocs de mesura o d'espai i forma de 3r o 4t d'ESO i que es pot estendre diverses classes.

Arribem a l'aula amb un munt de fotocòpies en les quals simplement hi ha dibuixat un gran triangle equilàter i en repartim una per a cada alumne/a tot demanant que assenyali un punt en el seu interior, el que vulgui. A la classe anterior ja els vàrem indicar que portessin un regle, un escaire i un compàs.

A continuació els convidem a traçar les rectes perpendiculars des del punt escollit a cada costat (amb el regle i el compàs o l'escaire, però convé fer-ho amb cura) i que mesurin les distàncies des del punt a cadascun dels costats. Tothom obté mesures diferents, naturalment!

Ara demanem que sumin les tres mesures i que posin en comú els resultats obtinguts. Sorpresa! A tothom li dóna igual (llevat de petites diferències degudes a errors de mesura) amb independència del punt que s'hagi escollit!

Això proposa una nova pregunta que haurem d'investigar: Té alguna cosa d'especial aquest nombre que ens ha sortit? Té alguna relació amb el triangle? Els alumnes comencen a mesurar. D'entrada, mesuren els costats i no hi veuen relació. Finalment, algú amida l'altura del triangle (novament caldrà tenir cura en el traçat de la perpendicular) i observa amb sorpresa que la longitud de l'altura coincideix amb la suma de les tres distàncies que havíem obtingut. Tothom ho va provant i la descoberta es comparteix.

Realment, aquest triangle equilàter deu ser molt especial si compleix això! Potser que provéssim amb altes triangles! Convidem que, formant parelles (així han d'anar verbalitzant el que fan), construeixin els seus propis triangles equilàters, escullin un punt interior, calculin les tres distàncies als costats, les sumin i comprovin que el resultat obtingut és igual a l'altura del triangle. Llevat de petits errors de mesura, tothom anirà fent aquesta comprovació. Meravellós! Aquella propietat que havíem descobert per al triangle del full fotocopiat també es compleix per a cadascun dels nostres triangles!

Tot això que hem fet sobre paper, amb regle i compàs, ara ho podem fer més fàcilment amb GeoGebra. Resulta molt instructiu fer la construcció i emprar les eines que té per prendre mesures i comprovar la igualtat observada (amb molta més precisió!). Les possibilitats dinàmiques del GeoGebra ens permeten moure el punt escollit o canviar el triangle equilàter i continuar observant que la propietat es manté.

Ara seria el moment de «prendre consciència» de la nostra descoberta, de perfilar bé la regularitat que hem observat. Amb aquest propòsit demanem que cada parella escrigui en un paper, de la manera més clara possible, el que s'ha descobert. No es tracta de descriure el procés experimental que hem fet, sinó simplement la propietat observada. Després anirem compartint el que hem escrit i, conjuntament, construirem una frase que resumeixi la nostra descoberta. L'escriurem a la pissarra. Serà interessant anar comentant la terminologia i la lògica del text per tal que descrigui fidelment la idea que volem expressar. Potser sortirà una frase semblant a la següent:

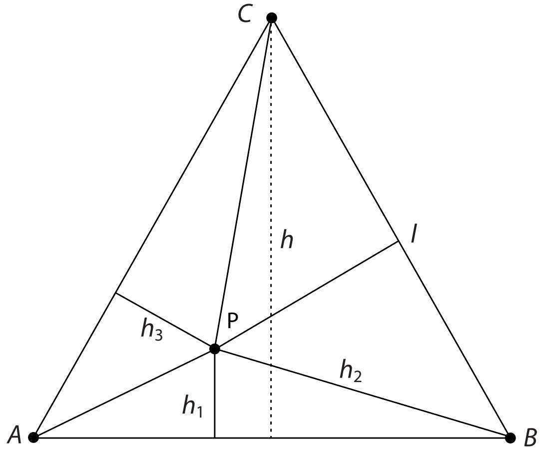
En qualsevol triangle equilàter, la suma de les distàncies des d'un punt interior a cadascun dels seus costats és sempre igual a l'altura del triangle.

Acabem d'anunciar en una frase el nostre descobriment! Les comprovacions que hem fet ens *mostren* molts de casos en què es compleix, però no *demostren* l'afirmació feta. Per ara es tracta, doncs, d'una conjectura. Tan sols arribarà a ser un teorema si ho aconseguim demostrar!

Ho demostrem? Probablement entre l'alumnat hi haurà interès a demostrar el que acaben de descobrir. Hi ha dues possibilitats atractives:

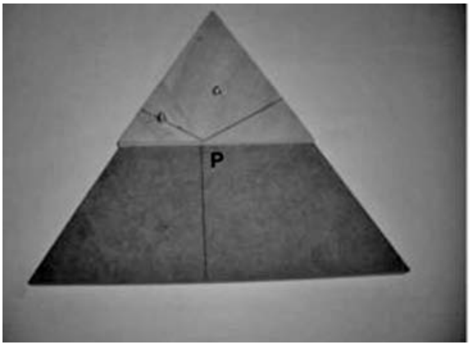
1. La demostració clàssica, que es basa en establir una igualtat entre àrees. Si el triangle és *ABC* i anomenem *P* al punt interior, és evident que l'àrea del triangle *ABC* coincideix amb la suma de les àrees dels triangles *APB*, *BPC* i *CPA*. Si anomenem h i l l'altura i el costat, respectivament, del triangle equilàter i h_1, h_2 i h_3 les altures respectives dels triangles *APB*, *BPC* i *CPA* que passen del punt *P* i cauen sobre els respectius costats, igualant àrees tindrem:

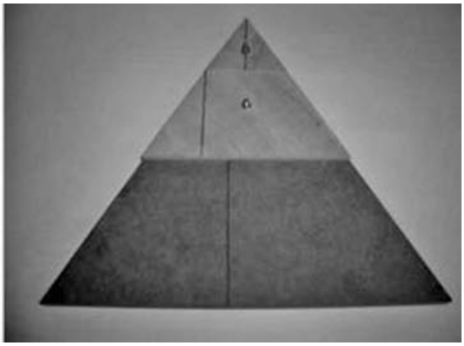
$$\tfrac{1}{2}l \cdot h = \tfrac{1}{2}l \cdot h_1 + \tfrac{1}{2}l \cdot h_2 + \tfrac{1}{2}l \cdot h_3$$



Simplificant $\frac{1}{2}l$ obtindrem la igualtat $h = h_1 + h_2 + h_3$. Tenint en compte que h_1, h_2 i h_3 són les distàncies del punt P als tres costats, el teorema queda demostrat.

2. Una demostració visual molt bonica basada en un material manipulable format per tres triangles equilàters instal·lats un sobre l'altre de manera que, a través de dos girs, les tres distàncies «recobreixen» exactament l'altura del triangle gran:





La proposta es pot consultar a l'ARC: http://apliense.xtec.cat/arc/node/1282. Agraeixo al professor Quim Tarradas la construcció del magnífic model que apareix a les imatges.

Ara sí que la nostra descoberta ha deixat de ser una conjectura i s'ha convertit en un teorema! De fet, a part de ser el nostre teorema, és el teorema de Viviani, que porta aquest nom en honor al seu primer descobridor, Vincenzo Viviani (Florència, 1622-1703), un deixeble de Galileu.

Arribats aquí, potser alguns alumnes o algunes alumnes poden ampliar encara una mica més aquesta exploració i fer-se noves preguntes que impulsaran noves experimentacions (aquí, el GeoGebra ens pot ser molt útil!), noves descobertes i, si cal, noves demostracions: També es compliria aquesta propietat si prenem el punt sobre algun dels costats o algun dels vèrtexs del triangle? Es podria formular una propietat semblant per a un triangle isòsceles en què els costats iguals fossin el doble de llargs que el costat diferent? Es podria reformular per a algun tipus de triangles escalens? Es podria pensar en una generalització a 3D per a tetraedres regulars?

Es va proposar una aplicació contextualitzada del teorema de Viviani en un dels «desafíos matemáticos» que es varen plantejar al diari *El País* en ocasió del centenari de la Real Sociedad Matemática Española. El problema va ser presentat i resolt pel professor David Obrador a través de dos vídeos interessants per portar a classe i que es poden consultar al web: http://goo.gl/Uj2xWH

Analitzant aquest exemple observem com hem seguit un procés en quatre etapes que permeten viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement matemàtic:

- **Experimentació**: S'explora, s'estableix contacte amb les idees que estan en joc, es tempteja, es fan proves, es prenen mesures, es fan comparacions... En l'exemple que s'ha presentat (com en tants d'altres), el GeoGebra ens pot ajudar molt en aquesta etapa!

▶ **Descoberta**: S'observa una regularitat experimental, sovint sorprenent, que apareix repetidament en successives proves. No es tracta d'un coneixement que ens ve de fora, sinó d'una descoberta personal, resultat de la nostra experiència!

▶ **Conceptualització**: És important posar en comú allò que hem descobert, perfilar bé la idea, sentir-la pròpia, esforçar-se en expressar-la correctament, arribar a una formulació compartida que neixi de l'experiència viscuda. No es tracta de descriure el procés realitzat, sinó la regularitat descoberta.

▶ **Demostració o formalització (si cal!):** Fins aquí tenim una conjectura que s'ha *mostrat* experimentalment en molts de casos, però que no s'ha *demostrat* a partir d'un raonament lògic que li atorga generalitat (aquesta distinció és interessant per apropar els alumnes a la metodologia matemàtica). A vegades serà convenient fer la demostració, d'altres potser no caldrà arribar a demostrar-ho (fins i tot perquè no sigui possible amb les eines de què es disposa), unes altres la demostració serà requerida pels propis alumnes...

La possibilitat d'emprar una metodologia d'aquesta mena no és excepcional. Són moltes les ocasions en què tenim oportunitat de fer un trajecte *Experimentació* → *Descoberta* → *Conceptualització* → *Demostració o formalització (si cal)* per construir idees matemàtiques. En aquesta secció, que precisament porta per títol «construint matemàtiques», intentarem presentar més exemples que us animem a portar a classe!